$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare la matrice diagonale che rappresenta l'isomorfismo in modo che la moltiplicazione sia più semplice

V spazio vettoriale $f: V \to V$ endo

Fissando B base di V, $n = \dim V$

f è rappresentata a $[M(f)]_B^B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Domanda: esiste una base B tale che $[M(f)]_B^B$ è diagonale?

Definizione

Se una tale base esiste allora f si dice diagonalizzabile

B' base di V

$$[M(f)]_{B'}^{B'} = B^{-1} \cdot [M(f)]_B^B \cdot B$$

Definizione

Una matrice $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se $\exists B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $B^{-1} \cdot M \cdot B$ è diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{iesimo} = \lambda \cdot e_i$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-esimo posto}$$

$M \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ Cerchiamo i vettori $v \in \mathbb{R}^m$ t.c. $M \cdot \overset{\text{autovettore}}{v} = \underset{\text{autovalore}}{\lambda} \cdot v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot v$$

Continuo

$$Mv - \lambda v = 0$$

$$Mv - \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot v = \underbrace{(M - \lambda\, id_m)}_{} \cdot v = 0$$

Questa è una matrice alla quale stiamo togliendo λ dalla diagonale

Se $v \cdot (M - \lambda\, id_m) = 0$ vuol dire che v si trova nel $\ker(M - \lambda\, id_m)$ e quindi che $V_\lambda \subseteq V$

Per quali valori di λ, $V_\lambda \neq 0$ ci interessano i valori di λ che portano il Ker ad essere $\neq \{0\}$ e quindi quando v non è nel Ker

Un autovalore di M è un $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $V_\lambda \neq \{0\}$

Se λ è un autovalore, $v \in V_\lambda$ è detto un autovettore di M relativo a λ

V_λ è detto autospazio di M relativo a λ

Quindi dobbiamo studiare Ker quando non è banale e quindi quando il rango non è massimo

$$\text{Ker} = \{0\} \iff rk \text{ è massimo} \iff \det \neq 0$$

$$\text{Ker} \neq \{0\} \iff rk \text{ non è max} \iff \det = 0$$

$$\det(M - \lambda - id_n) = \overbrace{\underbrace{P(\lambda)}_{\text{polinomio caratteristico di } M} = 0}^{\longrightarrow \text{ questo è un'equazione}}$$

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{quindi} \quad M - \lambda - id_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 5 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Con Sarrus: $\det(M - \lambda \cdot id_3) = (4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + (2)(3)(5)$

$+ (-2)(1)(2) - (2)(1-\lambda)(5) - (-2)(1)(-1-\lambda) - (4-\lambda)(3)(2)$

$= (4-\lambda)(\lambda^2-1) - 30 - 4 + 10(1-\lambda) - 2 - 2\lambda - 6(4-\lambda) =$

$= 4\lambda^2 - 4 - \lambda^3 - \lambda - 34 + 10 - 10\lambda - 2 - 2\lambda - 24 + 6\lambda =$

$= \underbrace{-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 20}_{\text{polinomio caratteristico di } M} \longrightarrow$ calcolando la soluzione di questo polinomio troviamo gli autovalori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A - \lambda \cdot Id_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-\lambda)(4-\lambda)-6) = 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-6 = \lambda^2-5\lambda-2$$

$$\lambda^2-5\lambda-2=0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} = \boxed{\frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}} \rightarrow$$ questi autovalori rendono $\operatorname{Ker} M \neq \{0\}$

$$\lambda = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1-\frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4-\frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

Se calcoli il Ker ti viene $\neq \{0\}$

Proposizione

Gli autovalori M sono le soluzioni dell'equazione $P(\lambda)=0$

Esempio

$f: R^2 \to R^2$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \arrow[r, squiggly] & M(f) \arrow[d, bend left] \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r(f) - \lambda \, id_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow det = \lambda^2 + 1 \searrow \lambda^2 + 1 = 0 \nearrow$ sol: $\exists x \in R$

quindi f non è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda \cdot id_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$det = (-\lambda)(4-\lambda) - (-4) = -4\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(4) = 0$$

$$\lambda = \frac{+4 \pm 0}{2} = < \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$\lambda = 2$ con $\underbrace{m(2)}$ $= 2$

↳ molteplicità algebrica di 2
ovvero il numero di occorrenze
di 2 nelle soluzione

teorema di ruffini

$P(x) \in R[x]$ polinomio $e \in R$ $P(e) = 0 \Leftrightarrow x - e \mid P(x)$

$(x-e)^3 \mid P(x)$?

$$m(e) = \max\{ m \in N \text{ t.c. } (x-e)^m \mid P(x) \}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda \cdot id_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (-5-\lambda)(7-\lambda) - (-32) = -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 32 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-3) = 16$$

$$\lambda = \frac{+2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} -1 \\ +3 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = +3$$

$$\underbrace{\underbrace{m(-1) = 1}\ ,\ \underbrace{m(3) = 1}}_{\text{molteplicità}}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \text{Ker}\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \overset{G-J}{=} \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$$

sostituisco 3 a λ

$$\Downarrow$$

$$y = x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 \\ -4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ovvero $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 \Rightarrow \ker\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -4 & 8\end{pmatrix} \overset{G-J}{=} \ker\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\{ x = 2y \right. = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10+8\\ -8+7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ ovvero $-1 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^2$ Ipotesi

rispetto alla base standard

$A = \begin{pmatrix}-5 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-5x+8y\\ -4x+7y\end{pmatrix}\end{array}$

rispetto a B ?

$[M(f)]^B_B$

$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Voglio scrivere $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ rispetto alla base B

$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ è uguale a $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ poi va scritto come combinazione lineare dei vettori della base di destinazione

il perché di questi risultati è riportato alla fine

quindi $[M(f)]^B_B = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

teorema:

Se l'unione delle basi degli autospazi forma una base di B allora f è diagonalizzabile

A è diagonalizzabile se $\exists B$ t.c. $B^{-1} A \cdot B = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2c_2\\c_2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}x = c_1 + 2c_2\\ y = c_1 + c_2\end{matrix} \rightarrow \begin{cases}c_1 + 2c_2 = 3\\ c_1 + c_2 = 3\end{cases} \begin{cases}\cancel{3} - c_2 + 2c_2 = \cancel{3}\\ c_1 = 3 - c_2\end{cases} \begin{cases}c_2 = 0\\ c_1 = 3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2 = c_1 + 2c_2\\ -1 = c_1 + c_2\end{cases} \begin{cases}c_1 + 2c_2 + 2 = 0\\ c_1 + c_2 + 1 = 0\end{cases} \begin{cases}-c_2 - 1 + 2c_2 + 2 = 0\\ c_1 = -c_2 - 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_2 = -1\\ c_1 = 0\end{cases}$$